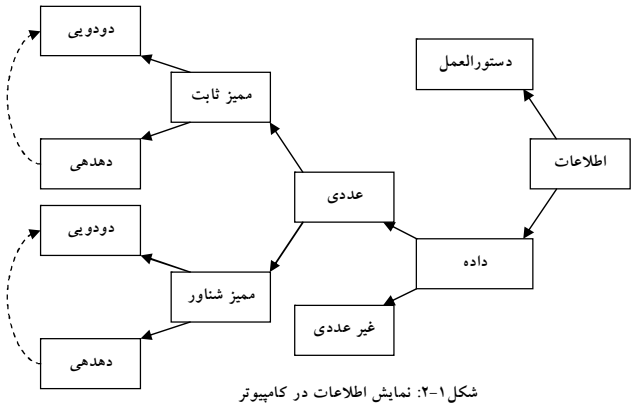


**شکل۱-۲: نمایش اطلاعات در کامپیوتر**

### ۱-۳-۱ اعداد دودویی

به طور کلی یک عدد با نقطه اعشاری با یکسری ضرایب به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$a_5a_4a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}$$

که ضرایب $a_x$ هر یک از ده رقم (0 و 1 و 2و... و 9) بوده و x مکان عدد را نشان می‌دهد، و از این رو توان 10 که ضریب در آن ضرب می‌گردد مشخص خواهد شد. این مطلب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$10^5a_5+10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10^1a_1+10^0a_0+10^{-1}a_{-1}+10^{-2}a_{-2}+10^{-3}a_{-3}$$

یک عدد دهدهی مانند 6548 کمیتی معادل با 6 هزارتایی، به علاوه 5 صدتایی، به علاوه 4 ده‌تایی به علاوه 8 واحد را نشان می‌دهد. هزارها، صدها و ... توانی از 10 هستند که با توجه به مکان ضرایب معین می‌گردند. به بیان دقیق‌تر، 6548 را می‌توان به صورت زیر نوشت:



$$6*10^{3} + 5*10^{2} + 4*10^{1} + 8*10^{0}$$

با این وجود معمول این است که فقط ضرایب را بنویسیم و توان‌های لازم 10 را از مکان آنها استنتاج کنیم.

سیستم اعداد دهدهی را در مبنای 10 گویند. زیرا از 10 رقم استفاده می‌کند و ضرایب در توانی از 10 ضرب می‌گردند. سیستم دودویی، یک سیستم اعداد متفاوت است. ضرایب سیستم اعداد دودویی فقط دو مقدار ممکن را دارند: 0 و 1 هر ضریب $a_x$ در $2^x$ ضرب می‌گردد. مثلاً معادل دهدهی عدد دودویی 11010.11 برابر 26.75 می‌باشد، که از ضرب ضرایب در توان‌هایی از 2 به‌دست می‌آید:

$$1*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0+1*2^{-1}+1*2^{-2}=26.75$$

به طور کلی، یک عدد در مبنای r به صورت حاصلضرب توانهای r در ضرایب مربوطه‌اش بیان می‌گردد:

$$a_n\cdot r_n+a_{n-1}\cdot r_{n-1}+\cdots+a_2\cdot r_2+a_1\cdot r_1+a_0+a_{-1}\cdot r_{-1}+a_{-2}\cdot r_{-2}+\cdots+ r_{-m}\, a_{-m}.$$

که ضرایب $a_x$ بین 0 تا r-1 می‌باشند. برای تفکیک اعداد در مبناهای مختلف، ضرایب را در داخل پرانتزها نوشته و اندیس مبنا را در زیر آن می‌گذاریم (به جز در اعداد دهدهی که محتوا بیانگر دهدهی بودن است).

همانطور که قبلاًاشاره شد، ارقام در یک عدد دوویی بیت خوانده می‌شوند. وقتی که یک بیت برابر 0 است در عمل جمع تبدیل مبنا نقشی ندارد. بنابر این تبدیل دودویی به دهدهی با جمع توانهایی از 2 که ضرایب آن 1 است صورت می‌گیرد. مثلاً عدد زیر را در نظر بگیرید:

$$(101101)_2=32+8+4+1=(45)_{10}$$

در عدد فوق چهار عدد 1 دیده می‌شود. دهدهی مربوطه جمع چهار توان از 2 می‌باشد. 24 اعداد اول ( مجموعاً معادل ۳ بایت) حاصل از 2 به توان n درجدول

شکل۱-۳ نشان داده شده‌اند. ستون‌ها یک در میان بیانگر یک بایت که معادل ۸ بیت می‌باشند در نظر گرفته شده‌اند تا راحت‌تر بتوان نمایش دودویی را یاد گرفت.

| n | $2^n$ | n | $2^n$ | n | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 8 | 256 | 16 | 65536 |
| 1 | 2 | 9 | 512 | 17 | 131072 |
| 2 | 4 | 10 | 1024 | 18 | 262144 |
| 3 | 8 | 11 | 2048 | 19 | 524288 |
| 4 | 16 | 12 | 4096 | 20 | 1048576 |
| 5 | 32 | 13 | 8192 | 21 | 2097152 |
| 6 | 64 | 14 | 16384 | 22 | 4194304 |
| 7 | 458 | 15 | 32768 | 23 | 8388608 |

**شکل۱-۳: توانهایی از ۲**

اعمال حسابی با اعدادی در مبنای r از همان قواعد دهدهی استفاده می‌کنند. هنگامی‌که از مبنایی به جز 10 استفاده می‌شود باید دقت کرد که تنها r رقم مجاز به کار گرفته شود. جمع دو عدد دودویی مشابه قوانین دهدهی محاسبه می‌شود، به جز این که ارقام جمع در هر مکان با ارزش فقط می‌تواند 0 یا 1 باشد. هر رقم نقلی حاصل در یک مکان مفروض، به وسیله جفت رقم‌های مرتبه بالاتر (باارزش‌تر) مورد استفاده قرار می‌گیرد. به مثال زیر توجه نمایید:

```
 101101
+100111
-------
1010100
```

حاصل جمع:

تفریق کمی پیچیده‌تر است. قوانین باز هم همان قوانین دهدهی هستند، به جز این که قرض در یک مکان با ارزش، 2 را به رقم مفروق‌منه می‌افزاید. (قرض در سیستم دهدهی، 10 واحد به رقم مفروق‌منه اضافه می‌کند).

```
 10110
-10011
-------
000110
```

باقیمانده:



عمل ضرب خیلی ساده است. ارقام مضروب‌فیه همیشه 1 یا 0 هستند. بنابراین حاصلضرب‌های جزیی برابر با 0 یا برابر با مضروب می‌باشند.

```
 1011
×101
-----
 1011
0000
1011
-----
10111
```

حاصل ضرب:

### ۱-۳-۲ اعداد مبنای هشت و شانزده

تبدیل از مبنای دو به مبنای هشت و شانزده، و بالعکس نقش عمده‌ای در کامپیوترهای دیجیتال بازی می‌کند. چون $8=2^3$ و $16=2^4$ است، هر رقم در مبنای هشت متعلق به سه رقم دودویی و هر رقم در مبنای شانزده متعلق به چهار رقم دودویی است.

هنگامی‌که تعداد ارقام کمتر از 10 باشد مرسوم است که r رقم مورد نیاز برای ضرایب از سیستم دهدهی گرفته شود. هنگامی‌که مبنای عدد از 10 بزرگتر است از حروف الفبا برای تکمیل 10 رقم دهدهی استفاده می‌گردد.

در زیر جدولی از شانزده عدد اول در مبناهای دهدهی، دودویی، هشت‌تایی و شانزده‌تایی نشان داده شده است:

همانطور که در جدول شکل ۱-٤ مشاهده می‌کنید دو ستون سمت راست مربوط به مبناهای هشت و شانزده می‌باشند که در ادامه به شرح هر یک خواهیم پرداخت. سیستم اعداد هشت هشتی یک سیستم مبنای 8 با هشت رقم 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 می‌باشد. لازم به ذکر است که ارقام 8 و 9 نمی‌توانند در یک عدد هشت هشتی ظاهر شوند.

| شانزده‌تایی (مبنای 16) | هشتایی (مبنای 8) | دودویی (مبنای 2) | دهدهی (مبنای 10) |
|---|---|---|---|
| 0 | 00 | 0000 | 00 |
| 1 | 01 | 0001 | 10 |
| 2 | 02 | 0010 | 02 |
| 3 | 03 | 0011 | 03 |
| 4 | 04 | 0100 | 04 |
| 5 | 05 | 0101 | 05 |
| 6 | 06 | 0110 | 06 |
| 7 | 07 | 0111 | 07 |
| 8 | 10 | 1000 | 08 |
| 9 | 11 | 1001 | 09 |
| A | 12 | 1010 | 10 |
| B | 13 | 1011 | 11 |
| C | 14 | 1100 | 12 |
| D | 15 | 1101 | 13 |
| E | 16 | 1110 | 14 |
| F | 17 | 1111 | 15 |

**شکل ۱-٤: اعداد با مبناهای متفاوت**

مثالی از یک عدد مبنای هشت عدد 537.4 است. برای تعیین مقدار معادل دهدهی لازم است عدد را به صورت یک سری از توانها با مبنای 8 بسط دهیم.

$$(537.4)_8 = 5*8^2 + 3*8^1 + 7*8^0 + 4*8^{-1} = (351.5)_{10}$$

در سیستم اعداد شانزده شانزدهی (مبنای 16)، ده رقم اول از سیستم دهدهی گرفته می‌شوند. حروف A، B، C، D، EوF به ترتیب به جای ارقام 10، 11، 12، 13، 14 و 15 به‌کار می‌روند. مثالی از یک عدد در مبنای 16 به صورت زیر است.

$$(B65F)_{16} = 11*16^3 + 6*16^2 + 5*16^1 + 15*16^0 = (46687)_{10}$$

### ۱-۳-۳ تبدیل مبنای اعداد

همانطور که قبلاًاشاره شد، تبدیل یک عدد در مبنای r به مبنای ده با بسط عدد به صورت یک سری از توانها و جمع همه جملات انجام می‌شود. اکنون برای تبدیل معکوس یک عدد دهدهی به یک عدد در مبنای r روالی کلی را ارائه می‌کنیم. اگر عدد حاوی نقطه ممیز باشد، لازم است تا عدد به دو بخش صحیح و کسری تفکیک گردد



زیرا هر بخش باید به طور جداگانه تبدیل شود. تبدیل یک عدد صحیح دهدهی به یک عدد در مبنای r با تقسیم عدد و همه خارج قسمت‌های متوالی بر r و جمع وزری باقیمانده‌ها انجام می‌گردد.

دودویی به هشت هشتی به سادگی با تفکیک عدد دودویی به گروه‌های سه رقمی‌در دو طرف نقطه دودویی به‌دست می‌آید. سپس به هر گروه یک رقم مبنای هشت تعلق می‌گیرد. مثال زیر روال مربوطه را نشان می‌دهد:

$$(10\ 110\ 001\ 101\ 011.\ 111\ 1\ 0000\ 0110)_2 = (26153.7406)_8$$

2 6 1 5 3 7 4 0 6

تبدیل از مبنای دو به مبنای شانزده نیز مشابه با روند فوق است، با این تفاوت که عدد دودویی به گروه‌های چهار رقمی‌تفکیک می‌شوند:

$$(10\ 1101\ 0111\ 1010\ .\ 1111\ 0110)_2 = (2D7A.\ F6)_{16}$$

2 D 7 A F 6

در ادامه مثال‌های مختلفی ارائه شده است:

**مثال۱:** عدد 41 را به دودویی تبدیل کنید.

ابتدا 41 را بر 2 تقسیم می‌کنیم تا خارج قسمت 20 و باقیمانده 1/2 به‌دست آید خارج قسمت مجدداًبه 2 تقسیم می‌گردد تا خارج قسمت و باقیمانده جدیدی به‌دست آید. این روال تا رسیدن به خارج قسمت 0 ادامه می‌یابد. ضرایب عدد دودویی مورد نظر به طریق زیر از باقیمانده‌ها به‌دست می‌آید:

| ضریب عدد دودویی | | باقیمانده | | خارج قسمت صحیح | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a0=1 | | ½ | + | 20 | = | 41/2 |
| a1=0 | | 0 | + | 10 | = | 20/2 |
| a2=0 | | 0 | + | 5 | = | 10/2 |
| a3=1 | | ½ | + | 2 | = | 5/2 |
| a4=0 | | 0 | + | 1 | = | 2/2 |
| a5=1 | | ½ | + | 0 | = | 1/2 |

جواب: $(41)_{10}=(a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0)_2=(101001)_2$

بنابراین، پاسخ $(101001)_2=(a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0)_2=(41)_{10}$ می‌باشد.

روال فوق را می‌توان به طریق ساده‌تر زیر دستکاری کرد:

| 41 | |
|---|---|
| خارج قسمت | باقیمانده |
| 20 | 1 |
| 10 | 0 |
| 5 | 0 |
| 2 | 1 |
| 1 | 0 |
| جواب= 101001 | |

تبدیل اعداد صحیح دهدهی به هر سیستم مبنای r مشابه مثال فوق است به جزاین که تقسیم در عوض ۲ بر r انجام می‌گردد.

**مثال۲:** عدد $(0.6875)_{10}$ را به دودویی تبدیل کنید.

ابتدا0.6875 در 2 ضرب می‌شود تا یک عدد صحیح و یک کسر حاصل گردد. کسر دوباره در 2 ضرب می‌شود تا یک عدد صحیح جدید و یک کسر جدید به‌دست آید. این فرآیند ادامه می‌یابد تا بخش کسری صفر گردد و یا تعداد ارقام دقت مناسبی را ارائه دهند. ضرایب عدد دودویی از اعداد صحیح به صورت زیر به‌دست می‌آید.

| صحیح | | کسری | ضریب |
|---|---|---|---|
| 0.6875 * 2=1 | + | 0.3750 | a-1 =1 |
| 0.3750 * 2 = 0 | + | 0.7500 | a-2 =0 |
| 0.7500 * 2 =1 | + | 0.5000 | a-3 =1 |
| 0.5000 *2 =1 | + | 0.0000 | a-4 =1 |

بنابراین پاسخ $(0.6875)_{10}=(0.\ a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2=(0.1011)_2$خواهد بود.

برای تبدیل یک عدد کسری از مبنای 10 به یک عدد در مبنای r، روش مشابهی به کار می‌رود. با این تفاوت که به جای ضرب در 2، ضرب در r انجام می‌گردد و ضرایب به جای 0، 1، از محدوده 0 تا r−1 خواهد بود.



**مثال۳:** عدد 153 را به مبنای هشت ببرید.

مبنای مورد نظر r برابر 8 است. ابتدا 153 بر 8 تقسیم می‌شود تا خارج قسمت صحیح 19 و باقیمانده 1 حاصل گردد. سپس 19 بر 8 تقسیم می‌شود تا خارج قسمت 2 و باقیمانده3 را به‌دست دهد. بالاخره 2 بر 8 تقسیم گردیده تا خارج قسمت 0 و باقیمانده 2 به‌دست آید. این روند به صورت مناسب زیر انجام می‌گردد:

| 153 | |
|---|---|
| باقیمانده | خارج قسمت |
| 1 | 19 |
| 3 | 2 |
| جواب = 231 | |

در تبدیل قسمت کسری مبنای ده به دودویی از روش مشابه با بخش صحیح استفاده می‌شود. با این وجود به جای تقسیم از ضرب و به جای باقیمانده‌ها، بخش‌های صحیح انتخاب می‌گردند. مجدداًبهتر است این روش با مثالی تشریح شود.

**مثال۴:** عدد $(0.513)_{10}$ را به مبنای هشت ببرید.

0.513 * 8 = 4.104

0.104 * 8 = 0.832

0.832 * 8 = 6.656

0.656 * 8 = 5.248

0.248 * 8 = 1.984

0.984 * 8 = 7.872

جواب تا هفت رقم با معنی که از بخش صحیح حاصلضرب‌ها به‌دست می‌آید برابر است با

$$(0.513)_{10}=(0.406517\ldots)_8$$

تبدیل اعداد دهدهی که دارای هر دو بخش صحیح و کسری هستند با تبدیل جداگانه دو بخش و ترکیب جواب‌ها صورت می‌گیرد. با استفاده از مثالهای ۱ و ۲ داریم:

$$(41.6875)_{10} = (101001.1011)_{2}$$

با استفاده از مثالهای ۳ و ٤ داریم:

$$(153.513)_{10} = (231.406517)_{8}$$

تبدیل اعداد از مبنای هشت یا شانزده به مبنای دودویی با روشی عکس روش بالا انجام می‌گردد که این رو به شرح زیر می‌باشد:

هر رقم مبنای هشت با سه رقم مبنای دو معادل خود جایگزین می‌شود. به طور مشابه، هر رقم مبنای شانزده با چهار رقم دودویی معادلش جایگزین خواهد شد. این مطلب در مثالهای زیر تشریح شده است:

$$(673.124)_{8} = (110\ 111\ 011.\ 001\ 010\ 100)_{2}$$

6 7 3 1 2 4

و

$$(306.D)_{16} = (0011\ 0000\ 0110.\ 1101)_{2}$$

3 0 6 D

اساساً کار با اعداد دودویی، به دلیل اینکه تعداد ارقامشان سه یا چهار برابر معادلشان در مبنای ده می‌باشد، مشکل است. مثلاًعدد دودویی 1111 1111 1111 معادل 4095 است. با این وجود کامپیوترهای دیجیتال اعداد دودویی را به‌کار می‌برند و گاهی نیز لازم است تا کاربر مستقیماًبه وسیله اعداد دودویی با ماشین ارتباط برقرار کند یک راه برای حفظ سیستم دودویی در کامپیوتر، که در ضمن تعداد ارقام را برای انسان کاهش می‌دهد، استفاده از رابطه بین سیستم اعداد دودویی و هشت هشتی یا شانزده شانزدهی است. با این روش، انسان بر حسب اعداد مبنای هشت یا شانزده فکر کرده و



در مواقعی که ارتباط مستقیم با ماشین لازم است، تبدیل لازمه را با بررسی این اعداد انجام خواهد داد. به این ترتیب عدد دودویی 1111 1111 1111 که دارای 12 رقم است در مبنای هشت به صورت چهار رقم 7777 و یا در مبنای شانزده به شکل FFF در می‌آید. به هنگام تبادل اطلاعات با انسان، نمایش مبنای هشت یا شانزده اعداد دودویی مطلوب تر است زیرا که در این مبناها اعداد با 1/3 یا 1/4 تعداد ارقامشان در دودویی قابل نمایش‌اند. بنابراین اغلب کتابچه‌های راهنمای کامپیوتر از اعداد مبنای هشت یا شانزده برای نمایش کمیت‌های دودویی استفاده می‌کنند. گرچه نمایش مبنای شانزده مناسب تر به نظر می‌رسد ولی انتخاب یکی از این دو کاملاًاختیاری است

## ۱-٤ متمم اعداد

متمم‌ها در کامپیوترهای دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار می‌روند. در هر مبنایی چون r، دو نوع متمم وجود دارد:

متمم مبنا

متمم مبنای کاهش یافته

فرم اول به متمم r و دومی‌به متمم r−1 موسوم است. وقتی که مقدار مبنا یا پایه را جایگزین کنیم، برای اعداد دودویی، متمم‌های 2 و 1 و برای اعداد دهدهی، متمم‌های 9, 10 را خواهیم داشت.

### ۱-٤-۱ متمم مبنا

متمم r یک عدد n رقمی‌مانند N در مبنای r به صورت $r^n - N$ به ازاء $N \neq 0$ و برابر با 0 در ازاء $N = 0$ تعریف می‌شود. از مقایسه این متمم با متمم (r−1) نتیجه می‌شود که متمم r از جمع 1 با متمم (r−1) حاصل می‌شود. زیرا

$$r^n - N = [(r^n - 1) - N] + 1$$