در مواقعی که ارتباط مستقیم با ماشین لازم است، تبدیل لازمه را با بررسی این اعداد انجام خواهد داد. به این ترتیب عدد دودویی 1111 1111 1111 که دارای 12 رقم است در مبنای هشت به صورت چهار رقم 7777 و یا در مبنای شانزده به شکل FFF در می‌آید. به هنگام تبادل اطلاعات با انسان، نمایش مبنای هشت یا شانزده اعداد دودویی مطلوب تر است زیرا که در این مبناها اعداد با 1/3 یا 1/4 تعداد ارقامشان در دودویی قابل نمایش‌اند. بنابراین اغلب کتابچه‌های راهنمای کامپیوتر از اعداد مبنای هشت یا شانزده برای نمایش کمیت‌های دودویی استفاده می‌کنند. گرچه نمایش مبنای شانزده مناسب تر به نظر می‌رسد ولی انتخاب یکی از این دو کاملاًاختیاری است

۱–۴ متمم اعداد

متمم‌ها در کامپیوترهای دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار می‌روند. در هر مبنایی چون r، دو نوع متمم وجود دارد:

متمم مبنا

متمم مبنای کاهش یافته

فرم اول به متمم r و دومی‌به متمم r-1 موسوم است. وقتی که مقدار مبنا یا پایه را جایگزین کنیم، برای اعداد دودویی، متمم‌های 2 و 1 و برای اعداد دهدهی، متمم‌های 9, 10 را خواهیم داشت.

۱–۴–۱ متمم مبنا

متمم r یک عدد n رقمی‌مانند N در مبنای r به صورت $r^n - N$ به ازاء $N \neq ۰$ و برابر با 0 در ازاء N = 0 تعریف می‌شود. از مقایسه این متمم با متمم (r-1) نتیجه می‌شود که متمم r از جمع 1 با متمم (r-1) حاصل می‌شود. زیرا

$$r^n - N = [(r^n - 1) - N] + 1$$

می‌باشد. به این ترتیب متمم ۱۰ یک عدد دهدهی مانند 2389 برابر است با 7611=7610+1 که از جمع 1 به مقدار متمم 9 حاصل می‌گردد. متمم 2 عدد دودویی 101100 برابر است با 010100 = 010011+1 و از جمع 1 با مقدار متمم 1 به‌دست می‌آید. چون 10^n عدد است که با یک 1 و n عدد 0 به دنبال آن نمایش داده می‌شود، 10^n-N که متمم 10 عدد N است نیز با تغییر ندادن 0های کم ارزش‌تر و تفریق اولین رقم غیر صفر کم ارزش‌تر از 10 و تفریق همه رقم‌های با ارزش‌تر از 9 حاصل می‌گردد. برای نمونه

متمم 10 عدد 012398 برابر 987602 می‌باشد.

متمم 10 عدد 246700 برابر 753300 است.

متمم 10 اولین عدد با تفریق 8 از 10 در کم‌ارزش‌ترین مکان و تفریق دیگر ارقام از 9 حاصل شده است.

متمم 10 دومین عدد بدین ترتیب حاصل گشته است که دو 0 کم‌ارزش‌تر رها می‌شوند، 7 از 10 و دیگر ارقام از 9 تفریق می‌گردند.

به طور مشابه متمم عدد دو می‌تواند با رها کردن همه 0های کم‌ارزش‌تر و نیز تغییر نکردن اولین 1 و جایگزینی همه 0ها با 1ها و 1ها با 0ها در دیگر ارقام با ارزش‌تر حاصل می‌شود. به طور نمونه

متمم 2 عدد 1101100 برابر 0010100 است

متمم 2 عدد 0110111 برابر 1001001 است

متمم 2 اولین عدد با رها کردن دو 0 کم‌ارزش‌تر و اولین 1 و سپس جایگزینی همه 1ها با 0 و 0ها با 1 در چهار رقم با ارزش‌تر باقی مانده به‌دست می‌آید. متمم 2 دومین عدد با رها کردن اولین 1 و متمم کردن دیگر ارقام حاصل می‌گردد.

در تعاریف قبلی، فرض شد که اعداد دارای نقطه ممیز نیستند. اگر عدد اولیه N حاوی ممیز باشد آن را موقتاً حذف نمود تا متمم r و $(r-1)$ به‌دست آید. آنگاه آن را به مکان مربوطه‌اش باز می‌گردانیم.

۱-٤-۲ متمم در مبنای کاهش یافته

با فرض داشتن عددی n رقمی‌مانند N در مبنای r، متمم $(r-1)$ عدد به صورت $(r^n-1)-N$ تعریف می‌شود. برای اعداد دهدهی، $r = 10$ و $r-1=9$ است، و به این ترتیب متمم 9 عدد N برابر $(10^n-1)-N$ خواهد بود. در اینجا 10^n نمایشگر عددی است که متشکل از 1 و به دنبال آن n عدد 0 می‌باشد.

10^n-1 عددی است که با n عدد 9 نشان داده می‌شود.

مثلاً اگر $n = 4$ باشد، داریم $10^4 = 10000$ و $10^4-1 = 9999$. به این ترتیب نتیجه می‌شود که متمم 9 یک عدد دهدهی با تفریق هر رقم از 9 حاصل خواهد شد. به چند مثال عددی زیر توجه کنید.

متمم 9 عدد 546700 برابر است با $999999 - 546700 = 453299$

متمم 9 عدد 012398 برابر است با $999999 - 012398 = 987601$

برای اعداد دودویی، $r=2$ و $r-1=1$ است، بدین ترتیب متمم 1 عدد N، $(2^n-1)-N$ خواهد بود. مجدداً 2^n برابر با یک عدد دودویی است که از یک 1، و n عدد 0 تشکیل شده است. 2^n-1 یک عدد دودویی متشکل از n عدد 1 می‌باشد. مثلاًاگر $n = 4$ باشد، داریم $2^4 = (10000)_2$ و $2^4-1=(1111)_2$. بنابراین متمم 1 یک عدد دودویی از تفریق هر رقم از 1 به‌دست می‌آید. با این وجود، هنگام تفریق ارقام دودویی از عدد 1، یکی از دو حالت $1-0=1$ و یا $1-1=0$ را خواهیم داشت، که سبب

می‌شود هر بیت از 0 به 1 و از 1 به 0 تبدیل شود. بنابراین متمم یک عدد دودویی با تغییر 1هابه 0 و 0ها به 1 حاصل می‌گردد. در زیر مثالهایی آورده شده است:

متمم 1 عدد 1011000 برابر است با 0100111

متمم 1 عدد 0101101 برابر است با 1010010

متمم $(r-1)$ اعداد مبنای هشت و شانزده به ترتیب از تفریق ارقام آنها از 7 یا F (15 دهدهی) حاصل می‌شود.

توجه: توجه داشته باشید که متمم یک متمم، عدد را به حالت اولیه‌اش باز می‌گرداند. متمم r عدد N برابر r^n-N است. متمم یک متمم برابر است با

$$r^n-(r^n-N)=N$$

که همان عدد اولیه است.

۱-٤-۳ تفریق به کمک متمم‌ها

روش مستقیم تفریق که در مدارس ابتدایی بیان شد از مفهوم قرض کردن استفاده می‌نماید. در این روش وقتی که یک رقم در مفروق‌منه کوچکتر از مفروق باشد یک 1 از رقم با ارزش‌تر قرض گرفته می‌شود. این روش هنگامی‌که تفریق با قلم و کاغذ انجام شود به خوبی کار می‌کند. با این وجود، هنگام پیاده‌سازی تفریق با سخت‌افزار دیجیتال، روش کمتر از روش‌های متمم کارایی دارد. تفریق دو عدد n رقمی بی‌علامت $M-N$ در مبنای r به صورت زیر انجام می‌شود:

مفروق‌منه M را به متمم r مفروض N، اضافه کنید. یعنی

$$M+(r^n-N)=M-N+r^n$$

اگر $M \geq N$ باشد، عمل جمع یک رقم نقلی انتهایی تولید می‌کند که باید چشم پوشی شود ؛آنچه باقی می‌ماند نتیجه $M-N$ است.

اگر $M < N$ باشد، عمل جمع هیچگونه رقم نقلی انتهایی تولید نمی‌کند و جواب برابر با $r^n - (M-N)$ است که همان متمم r عمل $(M-N)$ می‌باشد. برای یافتن جواب معمول، متمم r حاصل جمع را به‌دست می‌آوریم و سپس یک علامت منفی در جلو آن می‌گذاریم.

مثال‌های زیر روال را تشریح می‌کنند.

مثال۵: با استفاده از متمم 10 تفریق $72532 - 3250$ را انجام دهید.

M=	72532
متمم 10 عدد N =	+96750
حاصل جمع =	169383
چشم پوشی از رقم نقلی انتهایی 10^5 =	−100000
جواب =	69282

توجه کنید که M دارای 5 رقم ولی N فقط 4 رقمی‌است. چون هر دو عدد باید دارای تعداد ارقام برابری باشند، پس N به صورت 03250 نوشته می‌شود. متمم 10 این عدد N، یک 9 در با ارزش‌ترین مکان تولید می‌نماید. تولید رقم نقلی در با ارزش‌ترین مکان دلالت بر $M \geq N$ دارد و نتیجه نیز مثبت است.

مثال ۶: با استفاده از متمم 10 تفریق $3250 - 72532$ را به‌دست آورید.

M=	03250
متمم 10 عدد N =	+ 27468
حاصل جمع =	30718

که رقم نقلی در آن وجود ندارد. بنابراین

جواب $= -$(متمم 10 عدد30718) $= -69282$

توجه کنید که چون $3250 < 72532$ است نتیجه منفی است. نظر به این که ما با اعداد بی علامت سر و کار داریم، نمی‌توان برای این حالت نتیجه بدون علامتی به‌دست آورد. وقتی تفریق را با متمم‌ها انجام می‌دهیم، جواب منفی از نبود رقم نقلی انتهایی و نتیجه متمم تشخیص داده می‌شود. هنگام کار با کاغذ و قلم، می‌توانیم جواب را به یک

عدد منفی علامت‌دار تغییر دهیم تا به فرم معمول‌تر درآید. تفریق با متمم‌ها برای اعداد دودویی به روش مشابهی در مثال‌های زیر آمده است.

مثال۷: با فرض دو عدد دودویی $X = 1010100$ و $Y = 1000011$، تفریق‌های زیر را انجام دهید.

(الف) $X-Y$ و (ب) $Y-X$ با استفاده از متمم 2

X =	(الف) 1010100
متمم 2 عدد Y =	+0111101
حاصل جمع =	10010001
چشم پوشی از نقلی انتهایی 2^7 =	− 10000000
جواب: X−Y =	0010001

(ب)

Y =	1000011
متمم 2 عدد X =	+0101100
حاصل جمع =	1101111

رقم نقلی انتهایی وجود ندارد. بنابراین، جواب

$Y - X =$ (متمم 2 عدد1101111) $= -0010001$

تفریق اعداد بی علامت را می‌توان با متمم $(r-1)$ نیز انجام داد. به خاطر دارید که متمم $(r-1)$، یک واحد کمتر از متمم r است. به این علت، نتیجه جمع مفروق منه با متمم مفروق حاصل جمعی تولید می‌کند که یکی کمتر از تفاضل صحیح به هنگام رخداد نقلی انتهایی است. حذف نقلی انتهایی و افزودن 1 به حاصل جمع را رقم نقلی چرخشی می‌خوانند.

مثال۸: مثال ۷ را با استفاده از متمم 1 انجام دهید.

X–Y = 1010100 –1000011 (الف)

X =	1010100
Y =	+0111100
= حاصل جمع	1001000
= رقم نقلی انتهایی	+ 1
= X–Y جواب	0010001

Y– X = 1000011– 1010100 (ب)

Y =	1000011
X =	+0101011
= حاصل جمع	1101110

که رقم نقلی انتهایی وجود ندارد.

بنابراین جواب Y– X = (متمم 1 عدد 1101110)– = 0010001– است.

توجه کنید که نتیجه منفی با اخذ متمم 1 از حاصل جمع به‌دست آمده است زیرا این نوع متمم به کار رفت. روال رقم نقلی انتهایی چرخشی در تفریق اعداد دهدهی بی علامت با متمم 9 نیز قابل استفاده است.

۱–٤–٤ اعداد دودویی علامت‌دار

اعداد صحیح مثبت و از آن جمله صفر را می‌توان با اعداد بی علامت نشان داد. با این وجود برای نمایش اعداد صحیح منفی به علامتی نیاز نداریم. در حساب معمولی، یک عدد منفی را با یک علامت منها و عدد مثبت را با علامت بعلاوه نشان می‌دهند. به دلیل محدودیت در سخت‌افزار، کامپیوترها باید هر چیزی را با ارقام دودویی نشان دهند. مرسوم است که علامت را با یک بیت واقع در سمت چپ ترین مکان عدد نمایش دهند. معمولاًاعداد مثبت را با گذاشتن 0 و اعداد منفی را با گذاشتن 1 در محل بیت مزبور معرفی می‌نمایند.

لازم است بدانیم که هر دو گروه اعداد دودویی علامت‌دار و بی علامت هنگام ارائه به کامپیوتر از رشته بیت‌ها تشکیل شده‌اند. معمولاًکاربر علامت‌دار بودن یا نبودن عدد را معین می‌نماید. اگر عدد دودویی علامت‌دار باشد سمت چپ‌ترین بیت، علامت، و بقیه بیت‌ها علامت هستند. اگر عدد دودویی بدون علامت فرض شود، سمت چپ‌ترین بیت، با ارزش‌ترین بیت عدد خواهد بود. مثلاًرشته بیت‌های 01001 می‌تواند به عنوان 9 (دودویی بی علامت) و یا 9+ (دودویی علامت‌دار) در نظر گرفته شود زیرا سمت چپ‌ترین بیت 0 است. رشته بیت‌های 11001 به عنوان 25 بی علامت و یا 9 علامت‌دارمنفی خواهد بود زیرا در سمت چپ‌ترین مکان عدد، رقم 1 وجود دارد که بیانگر منفی بودن عدد، و بقیه چهار بیت عدد 9 را نشان می‌دهد. معمولاًاگر نوع عدد از قبل مشخص باشد هیچگونه اشتباهی در تشخیص وجود نخواهد داشت.

نمایش اعداد علامت‌دار در آخرین مثال فوق، نمایش مقدار علامت‌دارمنفی نامیده می‌شود. در این نامگذاری، عدد شامل مقدار و یک سمبل (+ یا –) یا یک بیت (0 یا 1) برای مشخص نمودن علامت است. این روش در محاسبات معمولی مورد استفاده می‌باشد. وقتی که عملیات حسابی در یک کامپیوتر پیاده‌سازی می‌شوند، بهتر است روش دیگری به نام سیستم متمم علامت‌دارمنفی برای ارائه اعداد منفی به کار گرفته می‌شود. در این سیستم، یک عدد منفی با متمم‌اش مشخص می‌شود. در حالی که سیستم مقدار علامت‌دارمنفی، عدد را با تغییر علامتش منفی می‌کند، سیستم متمم علامت‌دارمنفی ، منفی عدد را با متمم سازی‌اش تهیه می‌نماید. چون اعداد مثبت همواره با 0 در سمت چپ‌شان شروع می‌شوند متمم همواره با 1 آغاز می‌گردد، که بیانگر عدد منفی خواهد بود. سیستم متمم علامت‌دارمنفی می‌تواند از متمم 1 یا متمم 2 استفاده کند ولی متمم 2 رایج‌تر است. به عنوان مثال فرض کنید که عدد 9 با هشت بیت در دودویی نشان داده شده باشد. 9+ با یک بیت 0 در سمت چپ ترین مکان و به دنبال آن معادل دودویی 9 می‌آید که نتیجه 00001001 خواهد بود. توجه داشته باشید که تمام هشت بیت باید مقدار داشته باشند، بنابراین پس از بیت علامت بقیه مکان‌ها تا

اولین 1 از سمت چپ با 0 پر می‌شوند. هر چند که برای نمایش 9+ فقط یک راه وجود دارد، برای نمایش 9- سه روش موجود است.

- نمایش مقدار علامت‌دارمنفی 10001001
- نمایش متمم 1علامت منفی‌دار 11110110
- نمایش متمم 2علامت منفی‌دار 11110111

در سیستم مقدار علامت‌دارمنفی، با تغییر بیت علامت در سمت چپ‌ترین مکان، از 0 به 1، عدد 9- به 9+ تبدیل می‌شود. در متمم 1 علامت منفی‌دار، 9- را با متمم کردن همه بیت‌های9+، از جمله بیت علامت به‌دست می‌آوریم. در متمم2 علامت منفی‌دار، 9- با متمم2 کردن تمام بیت‌های عدد مثبت از جمله بیت علامت حاصل می‌شود.

شکل۱-۵، همه اعداد دودویی 4 بیت را به هر سه فرم نمایش، نشان می‌دهد. عدد دهدهی معادل نیز به منظور وجود مرجع آورده شده است. توجه کنید که اعداد مثبت در هر سه نمایش یکسانند و دارای یک 0 در سمت چپ ترین مکان می‌باشند.

مقدارعلامت منفی‌دار	متمم1علامت منفی‌دار	متمم 2علامت منفی‌دار	دهدهی
0111	0111	0111	+7
0110	0110	0110	+6
0101	0101	0101	+5
0100	0100	0100	+4
0011	0011	0011	+3
0010	0010	0010	+2
0001	0001	0001	+1
0000	0000	0000	+0
1000	1111	-	-0
1001	1110	1111	-1
1010	1101	1110	-2
1011	1100	1101	-3
1100	1011	1100	-4
1101	1010	1011	-5
1110	1001	1010	-6
1111	1000	1001	-7
-	-	1000	-8

شکل۱-۵: اعداد دودویی علامت‌دار

سیستم متمم 2علامت منفی‌دار تنها یک نمایش برای 0 دارد که همیشه مثبت است. دو سیستم دیگر دارای 0 مثبت و 0 منفی‌اند، چیزی که در محاسبات معمولی با آن مواجه نمی‌شویم. مجدداًتوجه کنید که همه اعداد منفی دارای 1 در سمت چپ‌ترین بیت‌اند. به این ترتیب ما آنها را از اعداد مثبت تفکیک می‌نماییم. با چهار بیت قادریم 16 عدد دودویی را نشان دهیم.

در سیستم مقدار علامت‌دارمنفی و متمم 1، هشت عدد مثبت و هشت عدد منفی و از جمله دو عدد صفر وجود دارد. در نمایش متمم 2، هشت عدد مثبت از جمله صفر و هشت عدد منفی موجود است. سیستم مقدار علامت‌دارمنفی در حساب معمولی مورد استفاده است و هنگامی‌که در کامپیوتر به کار رود، مشکلاتی به همراه دارد زیرا باید علامت و مقدار به طور جداگانه دستکاری شوند. بنابراین، معمولاً متمم‌علامت منفی به کار گرفته می‌شود. متمم 1 نیز مشکلاتی را به بار می‌آورد و به ندرت در محاسبات به کار می‌رود. متمم 1 برای اعمال منطقی مفید است چون تبدیل 0 به 1 و یا 1 به 0 معادل با عمل متمم منطقی است.

۱-۵ جمع حسابی

جمع دو عدد در سیستم مقدارعلامت منفی از قوانین معمول در حساب تبعیت می‌نماید. اگر علامت‌ها یکسان باشند دو مقدار را با هم جمع کرده و به حاصل جمع علامت مشترک را تخصیص می‌دهیم. اگر علامت‌ها یکی نباشند، مقدار کوچکتر را از بزرگتر کم می‌کنیم و به نتیجه حاصل علامت عدد بزرگتر را اختصاص می‌دهیم. مثلاً

$(+14)+(-39) = -(39-14) = -25$است، که با تفریق مقدار کوچکتر 14 از مقدار بزرگتر 39 و استفاده از علامت 39 برای علامت نتیجه انجام شده است. این فرایند به مقایسه علامت‌ها و اندازه‌ها و سپس اجرای جمع و تفریق نیاز دارد. روال مشابهی در نمایش مقدارعلامت منفی برای اعداد دودویی قابل اعمال است. بر عکس قوانین جمع